1 | Wieviellinear?

Prüfen Sie, welche der folgenden Abbildungen Bilinearformen sind:

$$f\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto 3x_1y_2$$

$$g\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2)) \mapsto x_1x_3 + y_2$$

$$h\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto {x_1}^2y_1 + x_2 + y_2$$

Prüfen Sie für jede Bilinearform ferner, ob sie alternierend, symmetrisch oder antisymmetrisch ist.

f: bilinear:

$$f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right) = 3x_1y_2 = (x_1\ x_2)\cdot\begin{pmatrix}3y_2\\0\end{pmatrix}$$

$$= (x_1\ x_2)\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}0&3\\0&0\end{pmatrix}}_{M}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$ 2

nicht schiefsymmetrisch oder alternierend, da $M^T \neq -M$ 1/2

nicht symmetrisch, da $M^T \neq M$ 1/2

g: kann keine Bilinearform sein, denn $\mathbb{R}^2 \neq \mathbb{R}^3$.

$g\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 1

h: nicht bilinear, z.B.

$$h\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, 0\cdot\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) = h\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) = 2,$$

$$0\cdot h\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) = 0$$ 1

Keine Punkte ohne Begründung.

2 | Bibabasiswechsel

Sei β die Bilinearform auf $\mathbb{R}^3$, die bezüglich der Standardbasis durch folgende darstellende Matrix gegeben ist:

$$M(\beta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass auch

$$B := \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b_3} \right)$$

eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist, und berechnen Sie die darstellende Matrix $M_B(\beta)$.

B ist Basis von $\mathbb{R}^3$, denn

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 - 2 - 2 \neq 0$$ 1

$$M_B(\beta)_{ij} = \beta(b_i, b_j) = b_i^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot b_j,$$ 1

also

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

3 $\left(-\frac{1}{2}\text{ je Rechenfehler}\right)$

3 | Abakus

Zeigen Sie, dass für die folgenden $(n+1)\times(n+1)$-Matrizen gilt:

(a)
$$\det\begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & b & \dots & b & a \end{pmatrix} = (a+nb)(a-b)^n$$

(b)
$$\det\begin{pmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & a_3 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^n(n+1)\cdot a_1\cdots a_n$$

a:
$$\det\begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & b & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} a+nb & a+nb & \cdots & a+nb \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$$

$$= (a+nb)\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$$

$$= (a+nb)\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{pmatrix}$$

$$= (a+nb)\cdot(a-b)^n$$

2,5

6:

$$\det\begin{pmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & a_3 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -a_1 & 0 & & & \\ & -a_2 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -a_n & 0 \\ 1 & 2 & \cdots & n & n+1 \end{pmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (-a_i) \cdot n+1$$

$$= (-1)^n (n+1)\, a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$$

2,5

4 | Blockiert

Seien A und D zwei quadratische Matrizen, sagen wir $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ und $D \in \mathrm{Mat}_K(m \times m)$, und sei $B \in \mathrm{Mat}_K(n \times m)$. Zeigen Sie, dass gilt:

(a)

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D).$$

(b) Zeigen Sie andererseits, dass

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D) - \det(B) \cdot \det(C)$$

selbst für quadratische Matrizen $A, B, C, D \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ im Allgemeinen *nicht* gilt.

a: 4

Option A : Laplacescher Entwicklungssatz

Induktion über n (= Größe von A)

IA: $n=1$: Entwicklung nach erster Spalte

IV: Aussage gilt für $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$.

IS: Sei nun $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{Mat}_K((n+1) \times (n+1))$.

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \overset{\text{Entwicklung nach erster Spalte}}{=} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i a_{i1} \cdot \det \begin{pmatrix} \underbrace{A_{\# i,1}}_{\text{Spalte 1 \& Zeile } i \text{ gestrichen}} & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

$$\overset{IV}{=} \left(\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i a_{i1} \cdot \det(A_{\# i,1}) \right) \cdot \det(D)$$

$$\underset{\text{Entwicklung nach erster Spalte, rückwärts}}{=} \det(A) \cdot \det(D)$$

$\square$

Option B : Gaußverfahren

Idee: Bringe $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ durch elementare Zeilenoperationen auf obere Dreiecksform $\begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & D' \end{pmatrix}$.

Dann gilt $\det \begin{pmatrix} A' & D' \\ 0 & B' \end{pmatrix} = \det(A') \cdot \det(D')$

[...]

(Sehr viel mehr Details für volle Punktzahl nötig.)

Option C: Leibnizformel

Sei $M = (m_{ij})_{ij} \in \mathrm{Mat}_K((n+m)\times(n+m))$.

Sei $m_{ij} = 0$ für alle (i,j) mit $(i > n$ und $j \leq n)$

Dann ist zu zeigen:

$$\det(M) = \det\left((m_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}\right) \cdot \det\left((m_{ij})_{\substack{i=n+1,\dots,n+m\\ j=n+1,\dots,n+m}}\right)$$

Das folgt z.B. direkt aus Leibnizformel:

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in S_{n+m}} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n+m} m_{i\sigma(i)}$$

Falls $\sigma \in S_{n+m}$ derart, dass

$$\sigma(\{n+1,\dots,n+m\}) \not\subseteq \{n+1,\dots,n+m\}$$

so existiert nämlich $i > n$ mit $\sigma(i) \leq n$.

Für dieses i ist nach Voraussetzung $m_{i\sigma(i)} = 0$.

Also brauchen wir nur über solche σ zu summieren, für die gilt:

$$\sigma(\{n+1,\dots,n+m\}) \subseteq \{n+1,\dots,n+m\} \qquad (*)$$

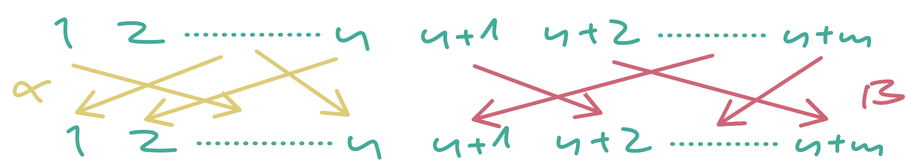
Für diese σ gilt dann auch

$$\sigma(\{1,\dots,n\}) \subseteq \{1,\dots,n\}.$$

Wir haben eine Bijektion

$$S_n \times S_m \longrightarrow \{\sigma \in S_n \mid \sigma \text{ erfüllt } (*)\}$$

$$(\alpha,\beta) \mapsto \sigma_{(\alpha,\beta)} := \left(i \mapsto \begin{cases} \alpha(i) & \text{falls } i \in \{1,\dots,n\} \\ n+\beta(i-m+1) & \text{falls } i \in \{n+1,\dots,n+m\} \end{cases} \right)$$



Es ist $sgn(\sigma_{(\alpha,\beta)}) = (-1)^{|\{\text{Fehlstände } \sigma_{(\alpha,\beta)}\}|}$

$$= (-1)^{|\{\text{Fehlstände } \alpha\}| + |\{\text{Fehlstände } \beta\}|}$$

$$= sgn(\alpha) \cdot sgn(\beta).$$

Demnach gilt:

$$\det(M) = \sum_{\substack{\sigma \in S_{n+m} \\ \sigma \text{ erfüllt } (*)}} sgn(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n+m} m_{i\sigma(i)}$$

$$= \sum_{(\alpha,\beta) \in S_n + S_m} sgn(\sigma_{(\alpha,\beta)}) \cdot \prod_{i=1}^{n+m} m_{i\,\sigma_{(\alpha,\beta)}(i)}$$

$$= \sum_{\alpha \in S_n} \sum_{\beta \in S_m} sgn(\alpha) \cdot sgn(\beta) \cdot \prod_{i=1}^{n} m_{i\alpha(i)} \prod_{j=1}^{m} m_{n+j,\, n+\beta(j)}$$

$$= \sum_{\alpha \in S_n} sgn(\alpha) \prod_{i=1}^{n} m_{i\alpha(i)} \cdot \sum_{\beta \in S_m} sgn(\beta) \prod_{j=1}^{m} m_{n+j,\, n+\beta(j)}$$

$$= \det\left((m_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \right) \cdot \det\left((m_{ij})_{\substack{i=n+1,\dots,n+m \\ j=n+1,\dots,n+m}} \right)$$

$\square$

b:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\det(\mathbb{1}_4) = -1, \quad \text{aber}$$

$$\underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{0} \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \underbrace{\det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{0} \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

1

5 | Vielkammersystem

(a) Zeigen Sie, dass für Untervektorräume $E_1, \dots, E_n$ eines Vektorraums V gilt:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i \quad \Leftrightarrow \quad \left(V = \sum_{i=1}^{n} E_i \ \text{ und } \ \underbrace{E_j \cap \Big(\sum_{i:\, i \neq j} E_i \Big) = \{\mathbf{0}\} \text{ für alle } j \in \{1, \dots, n\}}_{*} \right)$$

(vgl. Definition 4.21). (b) Zeigen Sie ferner, dass für $n > 2$ die Bedingung $(*)$ *nicht* ersetzt werden kann durch die einfachere Bedingung $E_i \cap E_j = \{\mathbf{0}\}$ für $i \neq j$.

a: Nach Notiz 4.22 gilt $V = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ genau dann, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $V = \sum_{i=1}^{n} E_i$

(ii) Für beliebige $\underline{v}_i \in E_i$ gilt:
$$\sum_{i=1}^{n} \underline{v}_i = \underline{0} \implies (\underline{v}_i = \underline{0} \ \forall i)$$

($\Rightarrow$) $V = \sum_{i=1}^{n} E_i$ klar wegen (i).

Sei nun für ein j
$$\underline{v} \in E_j \cap \Big(\sum_{i:\, i \neq j} E_i \Big)$$

Dann lässt sich $\underline{v}$ schreiben als $\underline{v} = \sum_{i:\, i \neq j} \underline{v}_i$ (siehe Notiz 4.11).

Mit $\underline{v}_j := -\underline{v}$ erhalten wir: $\sum_i \underline{v}_i = \underline{0}$

Also folgt wegen (ii): $\underline{v} = -\underline{v}_j = \underline{0}$.

2

($\Leftarrow$) (i) klar.

(ii): Seien $\underline{v}_i \in E_i$ mit $\sum_i \underline{v}_i = \underline{0}$.

Dann gilt für jedes j:
$$\underline{v}_j = -\sum \underline{v}_i \in \sum_{i:\, i \neq j} E_i$$

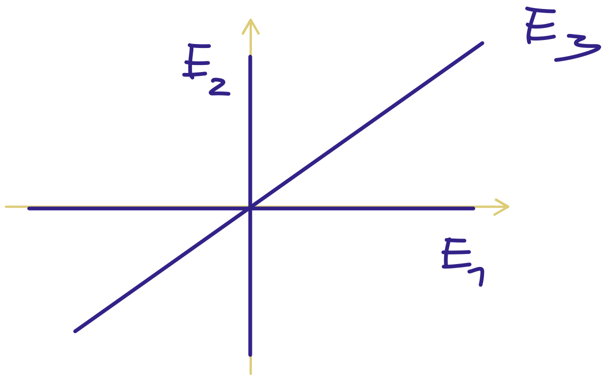
Also
$$\underline{v}_j \in E_j \cap \Big(\sum_{i:\, i \neq j} E_i \Big),$$

und somit $\underline{v}_j = \underline{0}$.

2

6: Betrachte

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$$
$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$$
$$E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$$



in $V := \mathbb{R}^2$. Es ist

$$E_1 \cap E_2 = E_1 \cap E_3 = E_2 \cap E_3 = \{\underline{0}\},$$

aber

$$\begin{aligned} E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3) &\longmapsto \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3 \end{aligned}$$

kann kein Isomorphismus sein, denn

$$\dim(E_1 \oplus E_2 \oplus E_3) = 3$$
$$\neq$$
$$\dim \mathbb{R}^2 = 2$$

1

6 | **Pythagoras**

Zeigen Sie die folgenden beiden Gesetzmäßigkeiten in einen euklidischen Vektorraum.

(a) Für zueinander orthogonale Vektoren **u** und **v** gilt der Satz des Pythagoras:

$$\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2$$

(b) Für beliebige Vektoren **u** und **v** gilt die Parallelogrammgleichung:

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$$

(c)
Inwiefern beweist Ihr Beweis zu (a) den aus der Schule bekannten Satz des Pythagoras?

a: $\|\underline{u}+\underline{v}\|^2 = \langle \underline{u}+\underline{v}, \underline{u}+\underline{v}\rangle$

$= \langle \underline{u},\underline{u}\rangle + \underbrace{\langle \underline{u},\underline{v}\rangle}_{0} + \underbrace{\langle \underline{v},\underline{u}\rangle}_{0} + \langle \underline{v},\underline{v}\rangle$

da $\underline{u} \perp \underline{v}$

$= \|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2$

2

b: $\|\underline{u}+\underline{v}\|^2 + \|\underline{u}-\underline{v}\|^2$

$= \langle \underline{u},\underline{u}\rangle + \cancel{\langle \underline{u},\underline{v}\rangle} + \cancel{\langle \underline{v},\underline{u}\rangle} + \langle \underline{v},\underline{v}\rangle$
$+ \langle \underline{u},\underline{u}\rangle - \cancel{\langle \underline{u},\underline{v}\rangle} - \cancel{\langle \underline{v},\underline{u}\rangle} + \langle \underline{v},\underline{v}\rangle$

$= 2\|\underline{u}\|^2 + 2\|\underline{v}\|^2$

2

c: Nein!
Wir haben den Satz des Pythagoras bereits benutzt, um für $\underline{u} \in \mathbb{R}^2$

$$\|\underline{u}\| = \sqrt{u_1^2+u_2^2}$$

als Länge von $\underline{u}$ zu interpretieren. Diese Interpretation können wir jetzt nicht nutzen, um den Satz des Pythagoras zu beweisen.

1